

# Les nombres décimaux



RÉGION ACADÉMIQUE  
BOURGOGNE  
FRANCHE-COMTÉ

MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION NATIONALE  
MINISTÈRE  
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,  
DE LA RECHERCHE  
ET DE L'INNOVATION



[www.ac-dijon.fr](http://www.ac-dijon.fr)

# Présentation

- *retour sur les fractions*
- les décimaux dans nos classes : questionnaire et constats  
→ les erreurs d'hier à aujourd'hui
- origine des erreurs et nature des obstacles  
→ petit historique  
→ ruptures et continuité  
→ retour sur notre système décimal et positionnel



- des pistes : analyse de situations
- synthèse

## Les décimaux dans nos classes : questionnaire



Quelle(s)  
difficulté(s) dans  
nos classes ?

## Des résultats qui témoignent de difficultés

Entoure la fraction égale à 80,4

$$\frac{804}{100}$$

$$\frac{80}{4}$$

$$\frac{84}{10}$$

$$\frac{804}{10}$$

$$\frac{804}{1000}$$

48,3 % des élèves ont répondu correctement à l'entrée en 6<sup>e</sup> en 2006

## Des résultats qui témoignent de difficultés

Écrivez  $\frac{1}{4}$  sous forme de nombre à virgule:

$$\frac{1}{4} =$$

27,0% des élèves ont répondu correctement à l'entrée en 6° en 2006\*

## Des résultats qui témoignent de difficultés

$\frac{3}{5}$  peut s'écrire...

- a. 0,35    b. 0,5    c. 0,6    d. 1,67    e. 3,5    f. 5,3

28% de bonnes réponses aux JDC (Journées défense et citoyenneté)

$\frac{7}{2}$  peut s'écrire...

- a. 2,7    b. 3,5    c. 5,3    d. 7,2

67,9% de bonnes réponses aux JDC (Journées défense et citoyenneté)

## Les décimaux

vus comme un ensemble de règles,

considérés comme une extension des entiers naturels :  
une illusion de facilité ?

## Retour sur l'histoire des nombres décimaux

En 1579, François Viète (1540 ; 1603), mathématicien français, encourage l'usage des fractions décimales.

Simon Stevin, comptable hollandais du XVIème siècle, transforme l'écriture  $21 + 5/10 + 3/100 + 2/1000$  en  $21^{(0)} 5^{(1)} 3^{(2)} 2^{(3)}$

où le (0) indique les unités entières, (1) les dixièmes, (2) les centièmes, etc.

On prononce : 21 « commencements », 5 « primes », 3 « secondes », 2 « tierces »



Statue de Stevin à Bruges

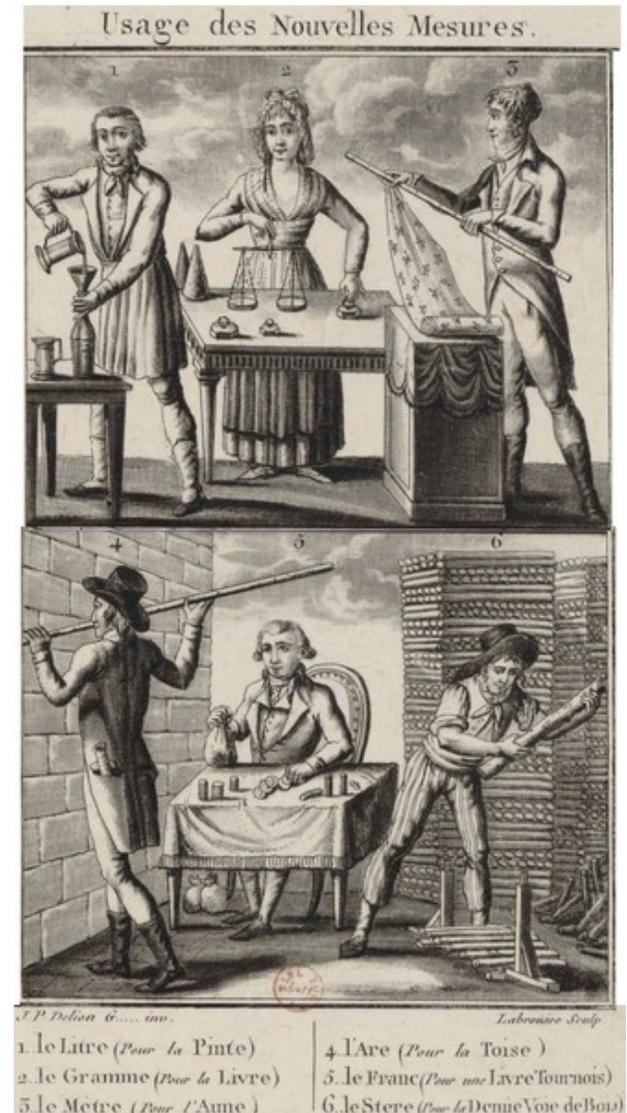
En 1595, le suisse Jost Bürgi (1552 ; 1632) fait surmonter le chiffre des unités par un petit rond :

○  
89532

Un peu plus tard, le mathématicien écossais John Napier remplace le (0) par une virgule (ou un point) et n'écrit pas les autres symboles

$21 + 5/10 + 3/100 + 2/1000$  s'écrit alors 21,532

Révolution française : imposition du système métrique



Estampe de 1800 : usage des nouvelles mesures décimales, rendu obligatoire en France

## Les nombres entiers naturels

**N**

### **Définition axiomatique des entiers naturels Giuseppe PEANO (1858 – 1932)**

- L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
- Tout entier naturel  $n$  a un unique successeur :  $n + 1$
- Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.

## Les nombres décimaux

### Les nombres décimaux

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$  où  $a$  est un entier relatif et  $n$  est un entier naturel.
- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire comme produit d'un entier relatif et d'une puissance de 10.
- Un nombre décimal est un nombre possédant un développement décimal limité.

## Définitions d'un nombre décimal pour les élèves

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous forme d'une fraction décimale.

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100}$$

## Les nombres décimaux

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire comme somme d'un entier et d'une fraction décimale ( $< 1$  et  $\geq 0$ ). Le nombre entier est la **partie entière** du nombre et la fraction décimale est sa **partie décimale**.
- Autrement dit : la partie décimale d'un nombre décimal est la différence entre ce nombre et sa partie entière.

## Les nombres décimaux

On évitera la représentation suivante :

partie entière  $568,87$  partie décimale

et on préférera écrire :

$568,87 = 568 + 0,87$   
partie entière partie décimale

## Une extension des savoirs

- Le nouvel ensemble englobe le précédent.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$$

- Les décimaux contribuent à la mesure du continu.
- L'addition des décimaux est, comme celle des entiers, commutative, associative, etc.

# Les fonctions des nombres

## Les entiers

- Ils servent à exprimer des quantités.
- Ils servent à ordonner et à calculer.
- Le nombre entier se construit dans une dialectique ordinaire / cardinale.

## Les décimaux

- Ils servent à exprimer des mesures de grandeurs,
- à désigner, à ordonner et à calculer.
- La représentation par l'écriture à virgule se construit dans une dialectique valeur exacte / valeur approchée.

# Les fonctions des nombres

Un usage qui évolue au cours de la scolarité

Constructions à partir d'insuffisances des nombres connus

Au cycle 3

Insuffisance des nombres entiers pour mesurer et représenter  
sur une demi-droite graduée

## L'origine et la nature des obstacles

« Un concept se forme sur une longue période (plusieurs années pour le concept de décimal). Il ne s'élabore pas isolément mais en relation avec d'autres concepts » (R. Douady, 1980)

**Il s'appuie sur les connaissances des élèves.**

Un obstacle lié aux connaissances

où le nombre décimal brise les règles de fonctionnement habituelles.

## Les erreurs d'hier à aujourd'hui

### Des difficultés... liées au passage de N à D

- « Le nombre le plus long est le nombre le plus grand. »

*conduit à  $13,456 > 423,1$*

-« Pour multiplier par 10, 100 ou 1000 on ajoute un, deux ou trois zéros. »

*conduit à  $13,7 \times 10 = 13,70$  ou  $130,7$*

-Dans N, tout nombre a un successeur et tous, sauf 0, ont un prédécesseur.

*« Le nombre qui suit  $1,23$  » n'a pas de sens,*

*difficultés pour trouver un nombre vérifiant l'encadrement :*

*$6,82 < \dots < 6,83.$*

## Les erreurs d'hier à aujourd'hui

### Des difficultés... liées au passage de N à D

-difficultés avec les mots :

*confusions « dixième » / « dizaine », « centième » / « centaine »  
« une dizaine » < « une centaine » mais « un dixième » > « un centième »*

-polysémie du mot *dixième* :

*« Le dixième coureur est arrivé juste après le neuvième. »*

*« Le dixième de 120 euros. »*

*« un dixième de seconde sépare les deux coureurs. »*

## Les erreurs d'hier à aujourd'hui

### Des difficultés... liées au codage des nombres à virgule

- La virgule est vue comme un séparateur de deux entiers, comme la barre de fraction.

*conduit à  $1/4 = 1,4$  ou à  $1,5 + 2,7 = 3,12$*

- Ceci est sans doute renforcé par une introduction des nombres à virgule ne s'appuyant que sur des mesures :  $5\text{m } 12\text{cm} = 5,12\text{m}$

- Que penser de l'ajout de zéros pour comparer deux nombres décimaux ?

*Comparer 12,37 et 12,7 en écrivant 12,37 et 12,70 ?*

- La virgule vue comme un axe de symétrie du nombre.

*conduit à écrire 2,007 pour « deux unités et sept centièmes »*

## Les erreurs d'hier à aujourd'hui

### Des difficultés...

### liées à des conventions particulières dans les usages sociaux

-« *Trois mètres sept plus deux mètres douze* » font cinq mètres dix-neuf  
alors qu'en classe

*trois virgule sept plus deux virgule douze font cinq virgule quatre-vingt-deux*  
$$3,7 + 2,12 = 5,82$$

-« Un kilo cinq et deux kilos deux cent cinquante »

-« Un euro cinq pour un kilo cinq »

## Les erreurs d'hier à aujourd'hui

### Autres difficultés

- Pour écrire un nombre décimal en chiffres, on peut devoir, comme pour les entiers, écrire des zéros qui ne se disent pas.

*« mille douze » ; « deux unités et treize millièmes »...*

- Des zéros inutiles ? ou pas ?

- Est-ce la même chose de dire que l'on mesure 1,8m ou 1,80m ?

- Le système sexagésimal pour les heures.  $2h15min = 2,25h$

## Des nombres entiers aux nombres décimaux

### Continuité :

Dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal, on conserve :

- Le principe de position
- Le principe du rapport de dix entre les différentes unités.

Ruptures : connaissances sur les nombres entiers qui ne sont plus valides sur les nombres décimaux :

- Les nombres entiers servent à dénombrer des collections d'objets.
- Tout nombre entier a un successeur.
- Entre deux entiers, on ne peut intercaler qu'un nombre fini d'entiers.
- Si un entier s'écrit avec plus de chiffres qu'un autre, alors il est  $>$  ce dernier.
- La multiplication est une addition itérée.
- Le produit est supérieur aux nombres multipliés, le quotient est inférieur.

## L'origine et la nature des obstacles

... la réussite dans l'apprentissage des décimaux est conditionnée par une bonne connaissance des nombres entiers.

Cet enseignement ne se limite pas à apprendre à écrire et à dire les nombres, mais s'attache à permettre une compréhension des aspects décimal et positionnel.

## Systeme conventionnel décimal et de position

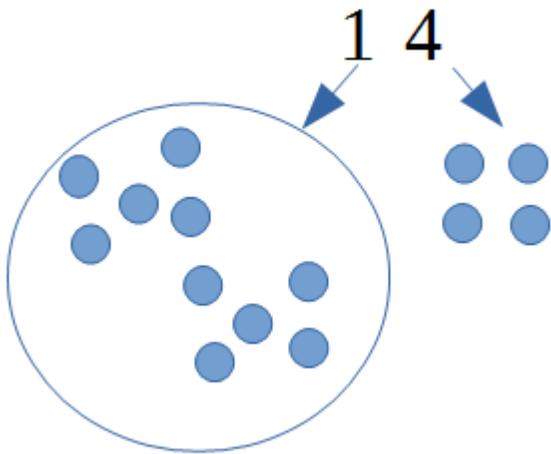
Notre numération repose sur deux principes :

- principe décimal : réitération de groupements par dix
- principe positionnel : la signification d'un chiffre (signe) dépend de sa position dans l'écriture du nombre.

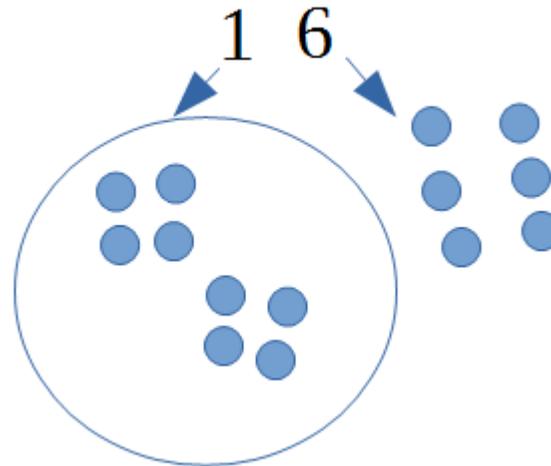
## Systeme conventionnel décimal

Écrivons « quatorze »

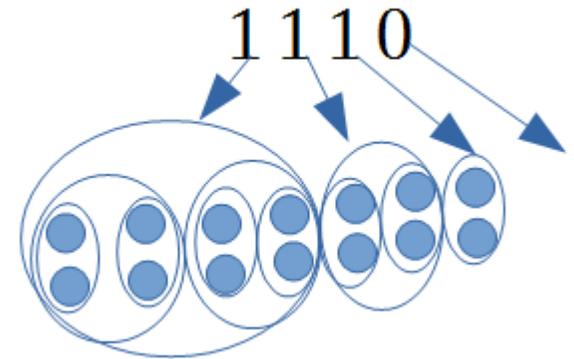
En base 10



En base 8



En base 2



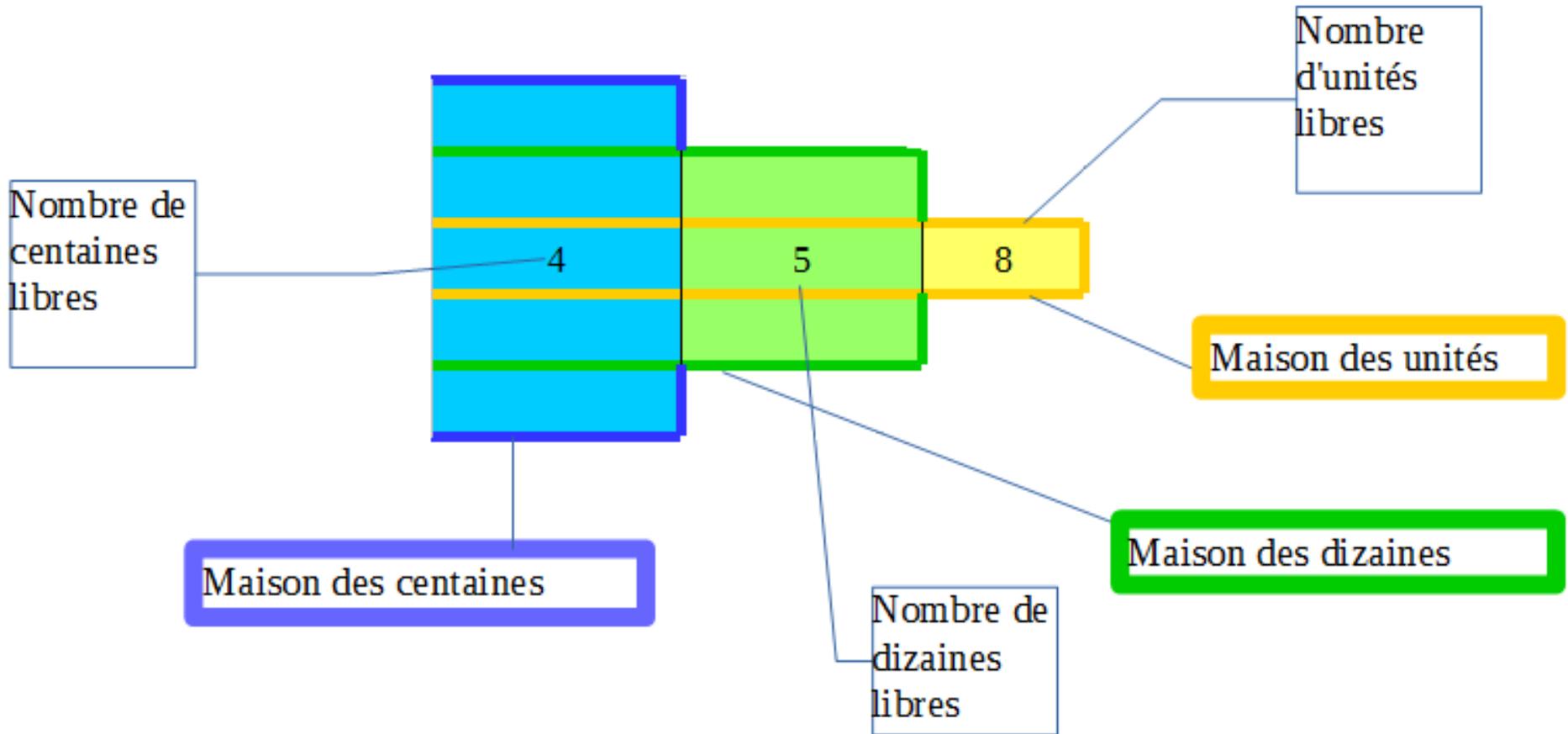
Ce système pour être compris doit faire apparaître la notion d'inclusion des unités dans les dizaines, des dizaines dans les centaines, mais aussi, des dixièmes dans les unités, des centièmes dans les dixièmes...

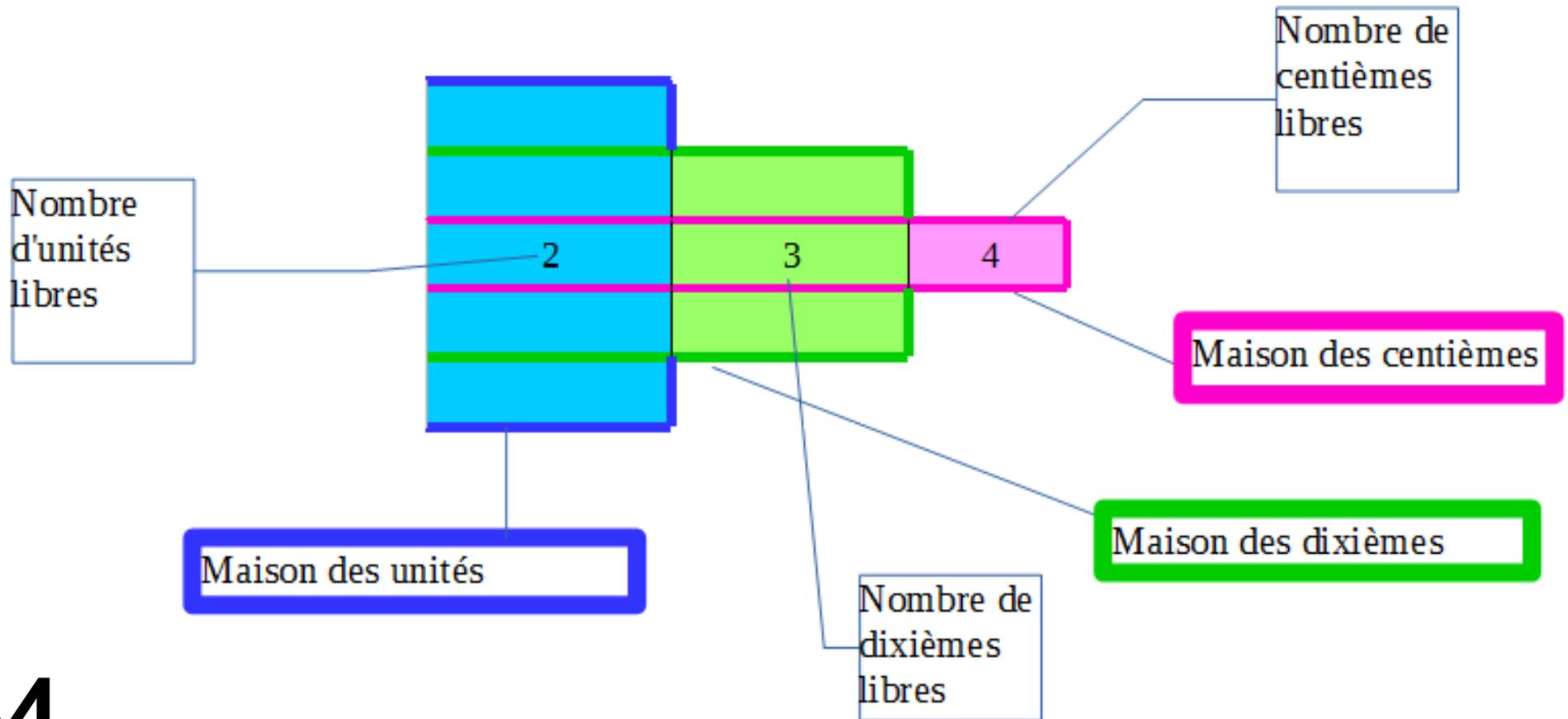
Le principe de position :

- dans **2,33**, le 2 vaut 2 unités donc 2,
- dans **3,23**, le 2 vaut 2 dixièmes donc 0,2.

Le principe du ***rapport de dix*** entre les **différentes unités** :

- dans 2,33, le 2 vaut 2 unités donc 20 dixièmes, donc 200 centièmes,
- dans 3,23, le 2 vaut 2 dixièmes donc 20 centièmes.





**2,34**

## Propositions d'aide à la progressivité

- Temps trop important consacré aux nombres entiers en début de CM1 et CM2

→ Travailler sur les progressions au sein du Cycle 3

- Introduction tardive de l'écriture décimale

→ Travailler sur le nombre décimal, c'est poursuivre la construction des nombres entiers

→ Veiller à un enrichissement progressif sur le cycle

→ Importance du diagnostic pour organiser son enseignement et les apprentissages

- Programmation segmentée

→ Rebrassage régulier : les travaux sur les fractions de cycle 3 et de cycle 2 se complètent mutuellement [au travers de la compétence Représentation et compréhension des nombres entiers]

- Méconnaissance réciproque école-collège

→ Echanger sur la chronologie de la construction du nombre décimal (CEC)

**S'appuyer sur les acquis du cycle 2 sur la notion de nombre, et la numération**

## Propositions d'aide à la progressivité

S'appuyer sur des activités où le nombre entier montre ses limites

**Fraction simple**  
- fraction unitaire  
- multiples de la fraction unitaire  
- fraction  $> 1$

**Fraction décimale**

**Nombre décimal**

## Propositions d'aide à la progressivité

**Le sens des nombres se construit dans la compréhension et l'usage combiné des propriétés, des relations, des désignations, et par la pratique d'opérations dans lesquelles un nombre intervient comme acteur ou résultat.**

**Les nombres décimaux se construisent en continuité et en rupture par rapport aux nombres entiers.**

**La compréhension du système décimal et positionnel est fondamentale.**

## Au cycle 2

**La compréhension et l'appropriation de ce système décimal de position passe par des décompositions, des recompositions :**

**En s'appuyant sur la  
MANIPULATION**

**En passant par le  
DESSIN**

**En utilisant la  
VERBALISATION**

**En privilégiant  
l'ORAL avant l'ÉCRIT**

## Au cycle 3

**Évolution du statut du nombre :  
Exprime des quantités et des mesures de  
grandeurs qui ne sont plus égales à un  
nombre entier d'unités.**

**formulations ORALES**

**Puis écritures  
SYMBOLIQUES**

**Puis écritures à  
VIRGULE**

progressivement 

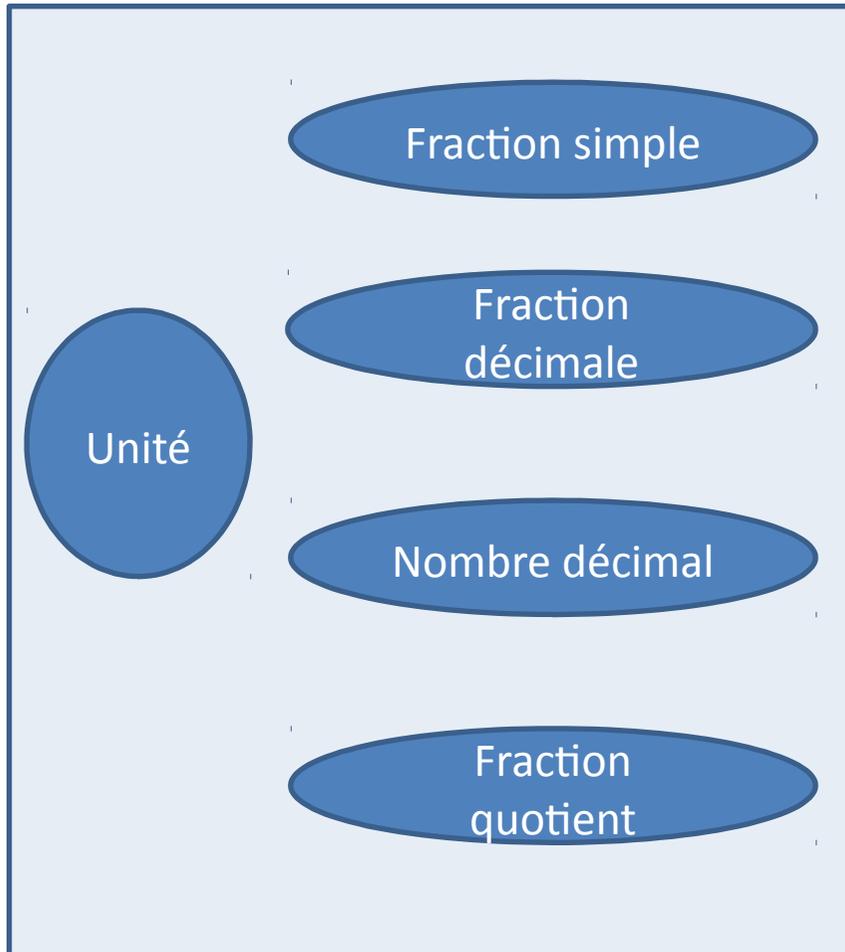
**Les différentes écritures doivent coexister tout au long du cycle 3  
pour renforcer la compréhension du codage que constitue  
l'écriture à virgule d'un nombre décimal.**

## Propositions d'aide à la progressivité

Cas de la ficelle



= outil pour traiter des problèmes que les nombres entiers ne peuvent résoudre

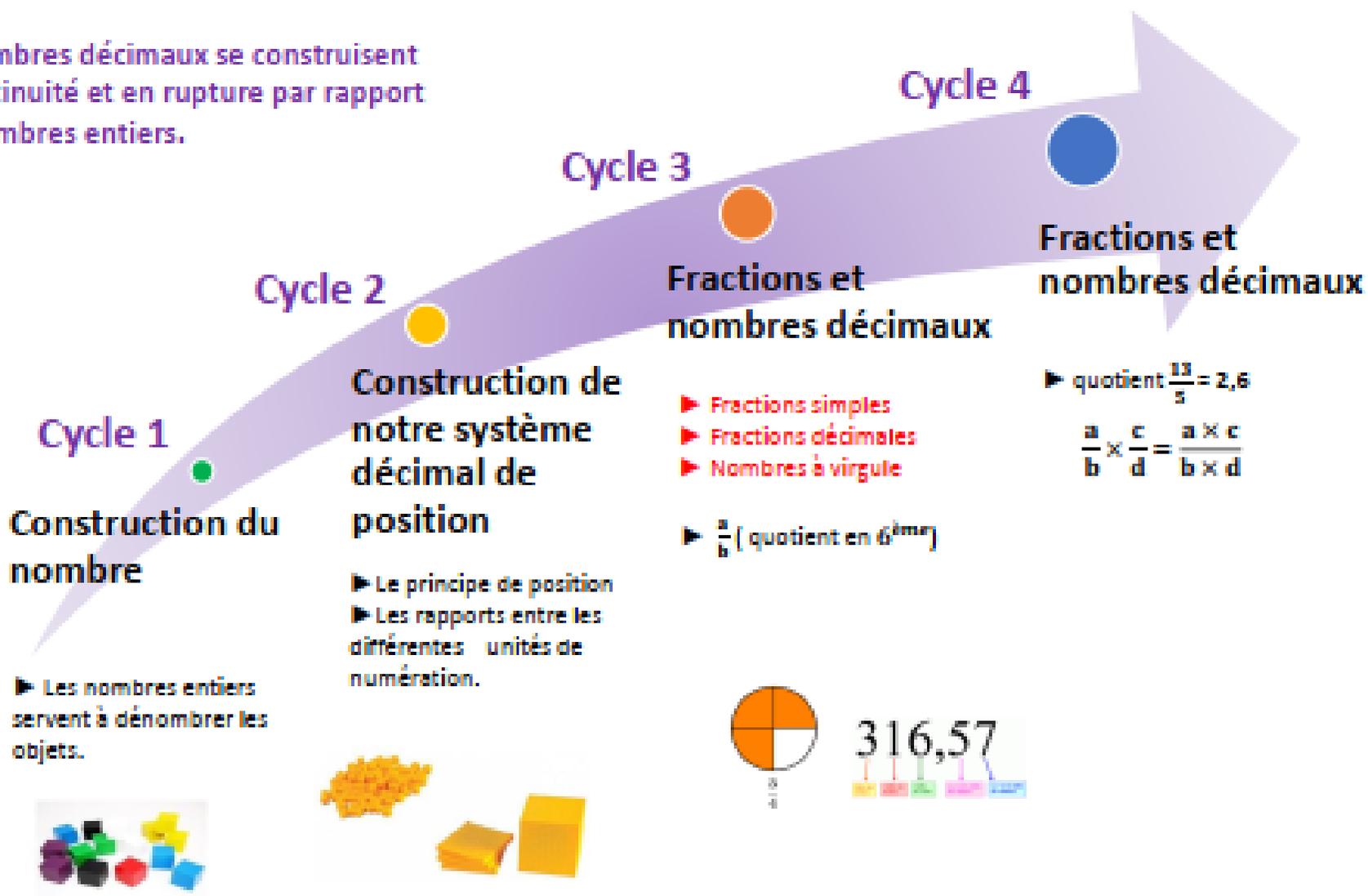


- Concept d'UNITE pas encore stabilisé
- Continuer de **matérialiser une unité** pour manipuler, se représenter, répliquer ...
- **Varier** les supports utilisés
- Travailler sur **des fractions > 1**
- Utiliser **demi-droite graduée**
- **Travailler les séances de calcul mental**

- La **rupture** entre le mot et l'écriture fractionnaire

# Propositions d'aide à la progressivité

Les nombres décimaux se construisent en continuité et en rupture par rapport aux nombres entiers.



*Merci de votre attention*



